Cuadernos de Economía. Vol. 28, 003-034, 2005

Sistemas de ciudades y tamaño: Un modelo de equilibrio general*

José Luis Sáez Lozano
Profesor Titular de la Universidad de Granada
Investigador del Instituto de Desarrollo Regional
josaez@ugr.es

Resumen

El objetivo de este artículo es analizar la importancia de las economías de aglomeración en la determinación del tamaño y la dimensión óptima de un sistema de ciudades. A partir de un modelo bisectorial de competencia perfecta explicamos la formación y el crecimiento de las ciudades. Ello, nos obliga a suponer que en cada aglomeración urbana existen dos sectores (economías domésticas y producción), la familias poseen un nivel de utilidad exógeno y las funciones de producción se caracterizan por depender de un solo input trabajo, presentan rendimientos constantes a escala y poseen un factor de progreso técnico neutral de Hicks.

La primera gran conclusión que se extrae de este estudio es que en la primera fase de desarrollo de las ciudades, cuando existen economías de aglomeración, aquella que está especializada en la producción de un determinado bien es a también la más dimensionada y emplea a más trabajadores que la ciudad diversificada; sin embargo, en la medida que aparecen las deseconomías de aglomeración, ésta última registra un incremento poblacional y emplea más fuerza laboral. Otras conclusiones relevantes

* Una versión preeliminar de este artículo fue aceptada para su publicación en 1993.

que se extraen de este trabajo son: (1) la producción óptima coincide con la de equilibrio, y (2) cuando una ciudad alcanza su dimensión óptima, el diferencial de renta del suelo es mayor o igual que el coste fijo de producción.

I. Introducción

Desde que Mills (1967) puso de manifiesto la importancia de las economías de aglomeración a la hora de analizar la formación de las ciudades, han sido muchos los trabajos publicados que han contribuido a enriquecer la literatura sobre el tema en cuestión. Hasta épocas recientes, la teoría económica urbana se centraba en el análisis del sistema de ciudades, tanto por el lado de la oferta (Weber, 1909 y Hoover, 1948), como por el de la demanda (Arnott, 1979; Arnott y Stiglitz, 1979; Kanemoto, 1980; Yang y Fujita, 1980, Hochman, 1981;…)[1]. El análisis del sistema de ciudades por el lado de la demanda se ha centrado, fundamentalmente, en el estudio del papel que juega el consumo de bienes públicos en la formación y crecimiento de las aglomeraciones urbanas. Asimismo, también se han publicado numerosos estudios sobre la demanda de localización, distribución de la población y precio del suelo (Alonso, 1964; Mills, 1967; Muth, 1969 y De Salvo, 1977); incluso, autores como Lucas (1988) y Raugh (1991) plantean que los individuos obtienen utilidad de su interacción entre ellos.

La aproximación por la vertiente de la producción plantea que la concentración de la actividad económica y social en torno a las ciudades viene definida por tres fuerzas económicas: la reducción del coste de transporte, la presencia de economías de escala y, por último, la existencia de efectos externos de aglomeración. Respecto a estos últimos, hay que distinguir entre efectos externos de localización, que son externos a la empresa e internos a la industria, y que permiten mantener los supuestos de competencia perfecta (Henderson, 1974); y los efectos de urbanización, que son externos a la industria y la empresa, pero internos al área urbana. Los antecedentes a estos trabajos los encontramos en la «causación circular» de Myrdal (1957) y la teoría sobre el coste de transporte de Hirschman (1959) que alcanza su apogeo con el modelo de Krugman (1991), pero sin obviar los estudios previos de Von Thünen (1826), Weber (1906), Christaller (1933), e incluso a Marshall (1890). La idea de los efectos desbordamiento surgió en el trabajo seminal de Jacobs (1969) y se prolonga

[1] En el trabajo sobre el sistema de ciudades de Brakman y cols. (1999) aparece una síntesis de las trabajos seminales y se discute las contribuciones de Krugman (1991).

en Lucas (1988), David y cols. (1990) y Arthur (1990). Esta línea de investigación continúa con Saxenian (1994), quien estudia la relación entre Silicon Valley y Stanford University, y en Gaspar y cols. (1998) que analizan los desbordamientos «intelectuales». Trabajos recientes como los de Benabou (1993), Rauch (1993) y Imagawa (1997) interrelacionan tres aspectos claves: concentración industrial, desbordamiento intelectual (educación) y crecimiento económico.

De las aglomeraciones no sólo se derivan beneficios, sino que también aparecen costes o deseconomías de aglomeración[2]. Con frecuencia, este tipo de costes aparecen cuando las ciudades superan un tamaño determinado, alcanzan su límite y comienzan a surgir los problemas. En este sentido, los argumentos de Becker (1968) sobre el crimen; los de Khan (1996) sobre la contaminación o los de Glaesser (1998) relativa a la selección adversa, nos hacen comprender mejor la realidad y los efectos externos que se generan en las grandes metrópolis[3].

De todo lo relatado hasta ahora, se concluye, que la literatura, hasta épocas recientes, ha explicado el tamaño de ciudad en función de la fuerza de aglomeración dominante en la misma (Fujita y Thisse, 1996), aunque la importancia e influencia que pueden ejercer elementos tales como la estructura del mercado interno no se ha analizado en profundidad. De ahí, que consideremos oportuno investigar la formación y configuración de sistemas de ciudades y su dimensión en base a un modelo bisectorial.

El principal objetivo en este estudio es investigar, conjuntamente, el papel que juegan las economías de aglomeración en la determinación del tamaño y la dimensión óptima de un sistema de ciudades. En este trabajo, además de profundizar en esa línea, se analiza la relación entre el tamaño óptimo y de equilibrio. En definitiva, este artículo se plantea con el firme propósito de contribuir a mejorar y ampliar el conocimiento que se tiene acerca de la interacción entre estructura de mercado, economías de aglomeración y sistema de ciudades.

Para alcanzar los objetivos enumerados anteriormente, organizaremos este trabajo en cuatro grandes apartados, que conjuntamente con esta introducción y las conclusiones, nos ayudarán a entender como se forma y crece un sistema de ciudades. Para ello, en el epígrafe siguiente presentamos un modelo bisectorial, con dos funciones de producción, que nos va a permitir dar respuesta a los tres grandes interrogantes que dan sentido a este trabajo: ¿Cual es el tamaño de una ciudad en equilibrio?

[2] También llamados «de congestión».

[3] En Glaesser (1998) y Alonso-Villar y De Lucio (1999) se ofrece una visión panorámica sobre los beneficios y costes de la aglomeración.

(tercer apartado), ¿Y la dimensión óptima? (cuarto epígrafe) y, por último, ¿Existe alguna relación entre tamaño óptimo y de equilibrio en un sistema de ciudades? (quinto apartado).

2. Descripción del modelo

En este epígrafe se presenta un modelo bisectorial de sistema de ciudades, con dos sectores: economías domésticas y producción. El sistema es el resultado, básicamente, de tres fuerzas que explican la concentración de la actividad económica y social en torno a las mismas: la reducción del coste de transporte, la presencia de economías de escala y, por último, la existencia de efectos externos de aglomeración (localización y urbanización). Además, existe una movilidad perfecta entre las ciudades que conforman el sistema, dado que se localizan en una llanura, sin accidente geográficos y, por tanto, no existen restricciones para suponer que el modelo propuesto, a priori, es de competencia perfecta.

Si admitimos que estamos en una situación de equilibrio general, entonces el nivel de utilidad $\overline{U}$ de las economías domésticas o familias que habitan en la zona residencial es exógeno[4], y el suelo no es de propiedad privada (podríamos suponer que el suelo es propiedad del Estado o de agentes no residentes *(absent landlords)*.

Por otro lado, asumimos que las ciudades en cuestión son monocéntricas y abiertas[5]. La ciudad A diversificada se caracteriza por producir los bienes X y Q y la presencia de las economías de localización[6] y urbanización[7]; mientras que la ciudad B

[4] Al imponer la condición de que el nivel de utilidad $\overline{U}$ de cualquier familia es constante e igual en todo el territorio, estamos asumiendo que en una situación de equilibrio no tendrá lugar la migración.

[5] Se entiende por ciudad monocéntrica, aquella que se compone de dos anillos concéntricos: el central, llamado *central bussines district* (CBD), y el periférico, que es la zona residencial. El límite de la ciudad (r_f), es decir, del espacio urbano, coincide con el principio de la tierra de uso agrícola. Para un mayor conocimiento de este tipo de modelos puede verse Fujita (1989). Por otro lado, decimos que el sistema de ciudades es abierto, si hay libre circulación de personas y mercancías.

[6] Las economías de localización son todos aquellos efectos externos derivados de la amplia oferta de población activa especializada, de las posibilidades de sustitución en el empleo, la proximidad locacional de empresas con ligazones comerciales,… Cuando estas externalidades son de signo de positivo, dan lugar a incrementos en el nivel de producción de los bienes X y Q.

[7] Las economías de urbanización son todos aquellos efectos externos derivados de la concentración urbana de la población activa, de la interacción entre los trabajadores de los distintos sectores, de la facilidad de transporte,… Cuando estas externalidades son de signo positivo, dan lugar a incrementos en el nivel de producción del bien X.

está especializada en la producción de Q y, por tanto, tan sólo existen economías de localización.

Por último, suponemos que los precios unitarios P_X y P_Q los determina el mercado.

Una vez expuestos los supuestos del modelo, hemos de pasar a definir los rasgos más reseñables que caracterizan a los sectores producción y economías domésticas.

2.1. El sector producción

Las funciones de producción X y Q se caracterizan por depender de un único input L, que es el trabajo[8]; presentan rendimientos constantes a escala, ya que se trata de una relación de proporciones fijas; el factor de progreso técnico es neutral en sentido de Hicks (y representa los efectos externos de aglomeración[9]); y por último, la relación de producción Q es idéntica en todas las ciudades:

$$X^i = F\,(L_{X_A}, L_{Q_A})\; L^i_X \quad \forall i \in X \tag{1}$$

$$Q^j = G\,(L_{Q_l})\; L^j_Q \quad \forall i \in X \tag{2}$$

siendo X^i es la cantidad de output X que produce la empresa i; Q^j la cantidad de output Q que produce la empresa j; L_{X_A} y L_{Q_B} y es la cantidad de trabajo empleada en las industrias X y Q de las ciudades A y B; L_{Q_l} es la cantidad de trabajo empleada en la industria Q de la ciudad l; L^i_X es el trabajo necesario para producir una unidad de X en la empresa i[10]; y L^j_q el trabajo necesario para producir una unidad de[11].

Las funciones de producción [1] y [2] se comportan de acuerdo con las siguientes propiedades:

Propiedad 1. $\dfrac{\partial F\left(L_{X_A},\, L_{Q_A}\right)}{\partial L_{Q_A}} > 0$ y $\dfrac{\partial F\left(L_{X_A},\, L_{Q_A}\right)}{\partial L_{Q_A}} > 0$, es decir, en la ciudad A, la productividad marginal de la función de efectos externos de urbanización es positiva.

[8] Esta restricción se impone con el fin de simplificar el desarrollo de nuestro análisis.

[9] Los efectos externos de aglomeración incluyen a las economías de urbanización y localización.

[10] Se supone que L^i_X es constante en todo el territorio.

[11] Se supone que L^i_Q es constante en todo el territorio.

Propiedad 2. $\frac{\partial G\left(L_{Q_l}\right)}{\partial L_{Q_l}} > 0$, es decir, en la ciudad *l*, la productividad marginal de la función de efectos externos de localización es positiva.

Propiedad 3: Las funciones de producción *X* y *Q* presentan rendimiento constantes de escala y, por tanto, los efectos externos de aglomeración no afectan a la dimensión industrial.

El objetivo de la empresa *i* será:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{X^i, L_X}{Max}\ \Pi^i = P_X X^i - W_{m_A} L_X^i \\ \\ s.a\ X^i = F\left(L_{X_A}, L_{Q_A}\right) L_X^i \end{array}\right\} \qquad [3]$$

De igual modo se comportará la empresa j:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{Q^j, L_Q^j}{Max}\ \Pi^j = P_Q Q^j - W_{m_l} L_Q^j \\ \\ s.a\ Q^j = G\left(L_{Q_l}\right) L_l^i \end{array}\right\} \qquad [4]$$

siendo Π^i y Π^j el beneficio de las empresas *i* y *j*, y W_{m_A} y W_{m_l} el salario medio en las ciudades *A* y *l*, respectivamente.

A partir de las condiciones de primer orden de ambos problemas de optimización, concluimos que:

$$PM_X^i\left(L_{X_A}, L_{Q_A}\right) \equiv P_X\, F\left(L_{X_A}, L_{Q_A}\right) = W_{m_A}^* \quad \forall\, i \in X \qquad [5]$$

$$PM_Q^j\left(L_{Q_l}\right) \equiv P_Q\, G(L_{Q_l}) = W_{m_l}^* \quad siendo\ l = A\ y\ B; \quad \forall\, j \in Q \qquad [6]$$

es decir, la productividad marginal *PM* de las empresas *i* y *j* es igual al salario medio W^{*}_{m} de las ciudades *A* y *l* , respectivamente.

2.2. *Las economías domésticas*

Las economías domésticas poseen dos características comunes: (1) cada familia reside en una sola ciudad, y (2) el único lugar de trabajo es el CBD. A partir de ahí, definimos la siguiente función de utilidad de las economías domésticas:

$$U = U\,(Z,h) \tag{7}$$

siendo Z la cantidad del(os) bien(es) consumido(s) por una familia y h el suelo ocupado por la misma.

La función de utilidad anterior cumple la siguiente propiedad:

Propiedad 4. $U\,(Z,h)$ es continua y creciente, $\forall\ Z > 0$ y $h > 0$.

Las familias han de realizar un gasto en transporte para desplazarse desde el hogar hasta el lugar de trabajo, que se encuentra a una distancia r del CBD:

Propiedad 5. La función de coste de transporte o de *commuting* para una familia situada a una distancia r del CBD es lineal *a lá* Muth-Mills[12]:

$$T(r) = tr; \quad t > 0 \tag{8}$$

siendo t es el coste de transporte por unidad de r.

A partir de las propiedades 4 y 5 podemos asumir que el objetivo de cualquier economía doméstica es:

$$\left.\begin{array}{l} Max\, U(Z,h) \\ s.a \quad Y - T(r) = P_Z Z + R(r)h(r) \end{array}\right\} \qquad [9]^{13}$$

[12] Para una visión introductoria, véase Muth (1969) , Mills (1967) y Fujita (1989). Artís *et al.* (2000) publicaron un trabajo sobre la importancia de los costes de *commuting* en las decisiones de localización.

[13] $Y - T(r)$ es la renta disponible de las economías domésticas, una vez deducidos los costes de transporte, y que destinan a la compra de Z y H.

siendo Y el nivel de renta de una familia; P_Z el precio unitario del bien Z, que viene determinado por el mercado; $R(r)$ la renta unitaria del suelo situado a una distancia r del CBD, es decir, es el coste de oportunidad de la tierra dedicada a uso residencial[14]; y $h(r)$ el suelo ocupado por una economía doméstica situada a una distancia r del CBD.

Si se resuelve el problema de maximización anterior, obtenemos las funciones de demanda compensada de Z y h:

$$\hat{Z}(r) = \hat{z}\left[Y - T(r),\ P_z^{-1}\right] \quad [10]$$
$$\hat{H}(r) = \hat{h}\left[Y - T(r),\ P_z^{-1}(r)\right] \quad [11]$$

Estas dos funciones de demanda cumplen la siguiente propiedad:

Propiedad 6. $\dfrac{\partial \hat{Z}(r)}{\partial Y} > 0 \quad y \quad \dfrac{\partial \hat{H}(r)}{\partial Y} > 0$.

Sustituyendo las ecuaciones [10] y [11] en [7], obtenemos la función de utilidad indirecta:

$$V\left[Y - T(r)\right] = \bar{U} \quad \forall\ r > r_f \quad [12]$$

es decir, en equilibrio, todas las familias poseen el mismo nivel de bienestar $\bar{U}$, con independencia de la ciudad en la que habiten, ya que se trata de un sistema de ciudades abierto, entre las que existe perfecta movilidad de personas:

La inversa de [12] representa la función de renta del suelo:

$$V^{-1} = B\left[Y - T(r),\ \bar{U}\right] \quad [13]$$

En equilibrio, la oferta y la demanda unitaria de suelo coincidirán y, por tanto:

$$R(r) = B\left[Y - T(r),\ P_Z,\ \bar{U}\right]\ \forall\ r \in [0, r_f] \quad [14]$$

que es la máxima renta que una economía doméstica estaría dispuesta a pagar por una unidad de suelo situada a una distancia r del CBD, pero manteniendo un nivel de utilidad $\bar{U}$.

[14] En este caso, el coste de oportunidad viene definido por el valor que tendría el suelo urbano, si se destinase a otros usos alternativos.

Una vez descrito el modelo y los dos sectores del mismo, hemos de proceder a estudiar cual será el tamaño de una ciudad en una situación de equilibrio.

3. El tamaño de una ciudad en equilibrio

Para deducir el tamaño de la ciudad en una situación de equilibrio, comenzamos suponiendo que la renta máxima que una familia ha de pagar por una unidad de tierra, en el límite de la zona residencial de la ciudad r_f, será igual al coste de oportunidad de ese suelo destinado a otros usos R_s (i. e. agrícola,...):

$$R_s = B\,[Y - T(r), P_z, \bar{U}] \qquad [15]$$

siendo $R_s > 0$.

Operando en la expresión anterior, obtenemos la función del límite urbano en equilibrio:

$$r_f = r\,(Y, \bar{U}) \qquad [16]$$

El número de familias que pueden habitar en la ciudad es:

$$N\left(Y, \bar{U}\right) = \int_0^{r_f} \frac{2\pi r}{\hat{h}\left[Y - T\left(r\right), P_Z, \bar{U}\right]}\, dr \qquad [17]$$

siendo $N\,(Y, \bar{U})$ la cantidad total de población.

Si invertimos la expresión anterior, obtendremos la función de costes marginales de una familia cuando desea mantener el nivel de utilidad $\bar{U}$:

$$Y\,(N, P_z, \bar{U}) = N^{-1}\,(Y, \bar{U}) \qquad [18]$$

En una situación de equilibrio, el salario monetario medio W_m^* ha de ser igual al coste marginal privado $Y\,(N, P_z, \bar{U})$ y al ingreso marginal de las economías domésticas W_m[15]. Por tanto, las condiciones de primer orden [5] y [6] se pueden expresar así:

[15] W'_m es la renta que ha de recibir cada empleado del sector producción para mantener el nivel de utilidad $\bar{U}$.

$$PM^i_x\,(L_{x_A}, L_{Q_A}) = PM^i_Q\,(L_{Q_A}) \equiv Y\,(L_{X_A} + L_{Q_A}, \bar{U}) = Y\,(N_A, \bar{U}) = W^*_{m_A}\ \forall i \in X \qquad [19]$$

$$PM^j_Q\,(L_{Q_l}) \equiv Y\,(L_{Q_l}\ \bar{U}) = Y\,(N^r_l,\ \bar{U}) = W^*_{m_l}\ \textit{siendo } l = A \textit{ y } B;\ \forall j \in Q \qquad [20]$$

Si además existe pleno empleo en el sistema de ciudades, entonces toda la población estará empleada:

$$N_A = L^X_A + L^Q_A \qquad [21]$$

$$N_B = L^Q_B \qquad [22]$$

siendo L^X_A y L^Q_A la población empleada en los sectores X y Q de la ciudad A, y L^Q_B la población ocupada en el sector Q de la ciudad B.

Para poder deducir el tamaño de una ciudad en equilibrio, hemos de definir las siguientes propiedades:

Propiedad 7. $\frac{\partial Y\left(N, \bar{U}\right)}{\partial N}$, es decir, a medida que en la ciudad habitan más familias, mayor es el coste que han de soportar las mismas.

Propiedad 8. $\frac{\partial Y\left(N, \bar{U}\right)}{\partial N} > 0$, es decir, a medida que se eleva el nivel de utilidad de las economías domésticas que habitan la ciudad, mayor será el coste marginal privado.

En base a todo lo anterior, podemos formular los siguientes teoremas:

Teorema 1. En un sistema con dos ciudades A y B en equilibrio y pleno empleo, si $Y\,(N^*_A, \bar{U}) >/< Y\,(N^*_B, \bar{U})$[16]*, entonces* $W^*_{m_A} >/< W^*_{m_B}$ *y, por tanto,* $N^*_A >/< N^*_B$ *para un nivel de utilidad* $\bar{U}$.

Dem: véase apéndice B.1.

Teorema 2. En un sistema con dos ciudades A y B en equilibrio y pleno empleo, en las que tan sólo se produce un único bien Q, si $N^*_A >/< N^*_B$*, entonces* $L^Q_A >/< L^Q_B$.

Dem: véase apéndice B.2.

A partir de los teoremas anteriores, se puede analizar la relación entre los tamaños de las ciudades que conforman el sistema. Para ello hemos de realizar, previamente, la siguiente definición:

[16] N^*_A y N^*_B representan el tamaño de la población de la ciudades A y B en una situación de equilibrio, respectivamente.

Definición 1: Sea $\overline{L}^X > 0$[17] y $\overline{U} > 0$,

$$\text{i)}\ \frac{\partial Y\left(\overline{L}^X + L_Q, \overline{U}\right)}{\partial L_Q} > \frac{\partial PM_Q\left(L_Q\right)}{\partial L_Q}\text{, siendo } \frac{\partial PM_Q\left(L_Q\right)}{\partial L_Q} > 0$$[18]

$$\text{ii)}\ \frac{\partial Y\left(\overline{L}^X + L_Q, \overline{U}\right)}{\partial L_Q} < \frac{\partial PM_Q\left(L_Q\right)}{\partial L_Q}\text{ siendo } \frac{\partial PM_Q\left(L_Q\right)}{\partial L_Q} > 0$$

De la primera parte de esta definición, se infiere, que en una situación de equilibrio, el coste marginal privado $Y(\overline{L}^X + L_Q, \overline{U})$ es superior a la productividad marginal $PM_Q(L_Q)$ de la industria Q, pues a medida que aumenta, marginalmente, el nivel de población activa L_Q en dicho sector, mayor será el coste que ha de soportar cada familia para mantener el nivel de utilidad $\overline{U}$; sin embargo, la segunda parte de la definición evidencia todo lo contrario, es decir, que el coste marginal privado es inferior a la productividad marginal en el sector Q.

A partir de la definición anterior, podemos formular un teorema que relaciona el tamaño de las ciudades en un sistema en equilibrio:

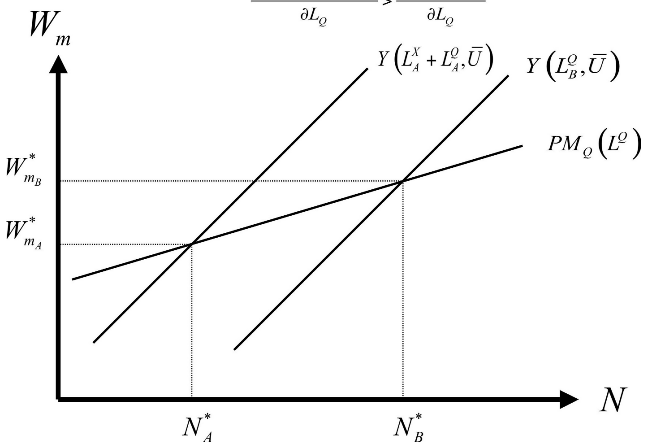
Teorema 3. En un sistema de ciudades A y B en equilibrio y pleno empleo, con un sector de producción bisectorial, si se da la primera condición de la definición 1, entonces $N^*_A < N^*_B$*; por el contrario, si se presenta la condición ii), entonces* $N^*_A > N^*_B$.

Interpretación geométrica. i) De las ecuaciones [19], [20], [21] y [22], se infiere, que en un sistema de dos ciudades A y B en equilibrio y pleno empleo, $PM_X(L^X_A, L^Q_A) \equiv Y(L^X_A, L^Q_A, \overline{U}) = W^*_{m_A}$ y $PM_Q(L^Q_B) \equiv Y(N_B, \overline{U}) = W^*_{m_B}$. Si se sustituyen estas dos expresiones en la primera parte de la definición 1 y operamos, concluimos que $N^*_A < N^*_B$ (véase figura 1).

[17] $\overline{L}^X$ es el número de empleados en el sector X, que se supone exógeno.

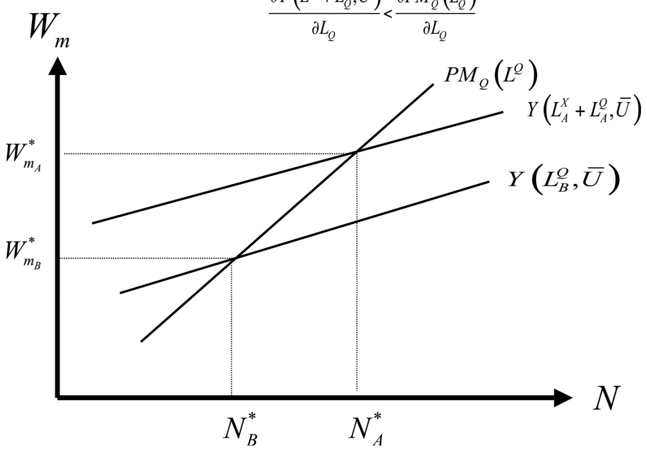
[18] Si se asume que $\frac{\partial PM_Q(L_Q)}{\partial L_Q} > 0$, implícitamente se está admitiendo la presencia de economías de aglomeración en la industria Q.

Figura 1
Tamaño de las ciudades en equilibrio y con pleno empleo, cuando
$$\frac{\partial Y\left(\bar{L}^X + L_Q, \bar{U}\right)}{\partial L_Q} > \frac{\partial PM_Q\left(L_Q\right)}{\partial L_Q}$$



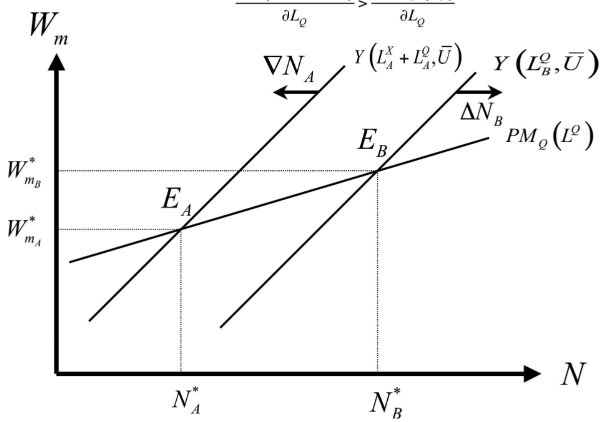
ii) Por analogía, si se sustituyen las dos expresiones anteriores en la segunda parte de la definición 1 y operamos, concluimos que $N^*_A > N^*_B$ (véase figura 2).

Figura 2
Tamaño de las ciudades en equilibrio y con pleno empleo cuando
$$\frac{\partial Y\left(\bar{L}^X + L_Q, \bar{U}\right)}{\partial L_Q} < \frac{\partial PM_Q\left(L_Q\right)}{\partial L_Q}$$



Corolario del teorema 3. i) En el caso de la condición primera de la definición 1, la situación de equilibrio es inestable, ya que al ser $W^*_{m_B} > W^*_{m_A}$ se iniciará un proceso migratorio desde la ciudad *A* hacia *B*, que dará lugar a que los puntos de equilibrio E_A *y* E_B estén más distantes, si se compara con la situación de partida (véase figura 3).

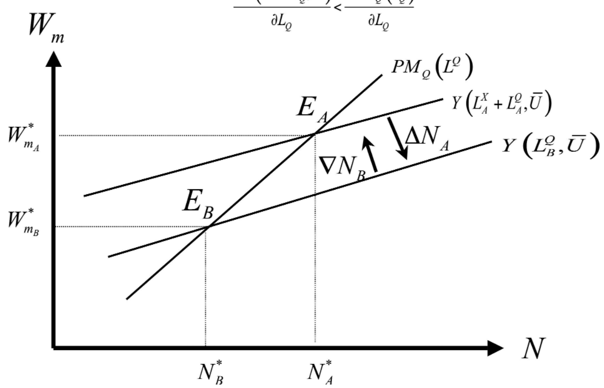
Figura 3
Equilibrio inestable cuando
$$\frac{\partial Y\left(\bar{L}^X + L_Q, \bar{U}\right)}{\partial L_Q} > \frac{\partial PM_Q\left(L_Q\right)}{\partial L_Q}$$



ii) En el caso de la condición segunda de la definición 1, la situación de equilibrio es estable, ya que al ser $W^*_{m_B} < W^*_{m_A}$, se iniciará un proceso migratorio desde la ciudad *A* hacia *B*, que dará lugar a que los puntos de equilibrio E_A *y* E_B estén más próximos, si se compara esta nueva posición con la de partida (véase figura 4).

El análisis realizado hasta ahora, se correspondía con una situación de economí-

Figura 4
Equilibrio estable cuando
$$\frac{\partial Y\left(\bar{L}^X + L_Q, \bar{U}\right)}{\partial L_Q} < \frac{\partial PM_Q\left(L_Q\right)}{\partial L_Q}$$



as de aglomeración. A continuación, estudiamos el tamaño de una ciudad en equilibrio, pero asumiendo la posible presencia de deseconomías de aglomeración en la industria $Q: \dfrac{\partial\, PM_Q\left(L_Q\right)}{\partial\, L_Q} < 0$. Para ello, hemos de comenzar redefiniendo las propiedades 1 y 2:

Propiedad 1'.

i) $\dfrac{\partial\, F\left(L_A^X, L_A^Q\right)}{\partial\, L_A^X} >/< 0, \quad \forall\, L_A^X >/< \overline{L}_A^X, \quad siendo\ \overline{L}_A^X > 0$[19].

ii) $\dfrac{\partial\, F\left(L_A^X, L_A^Q\right)}{\partial\, L_A^Q} >/< 0, \quad \forall\, L_A^Q >/< \overline{L}_A^Q, \quad siendo\ \overline{L}_A^Q > 0$[20].

Propiedad 2'.

$\dfrac{\partial\, G\left(L_B^Q\right)}{\partial\, L_B^Q} >/< 0, \quad \forall\, L_B^Q >/< \overline{L}_B^Q, \quad siendo\ \overline{L}_B^Q > 0$[21].

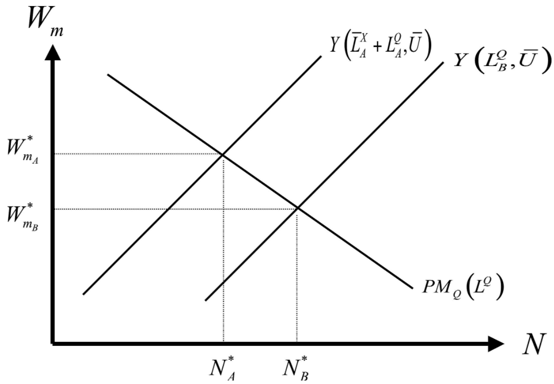
A partir de las propiedades 1' y 2' se puede analizar la relación entre los tamaños de las dos ciudades del sistema en una situación de equilibrio:

Teorema 4. Si $\overline{L}_A^X > 0$, *en un sistema de dos ciudades A y B en equilibrio, con pleno empleo y ante la presencia de deseconomias de aglomeración, si* $Y(\overline{L}_A^X + L_A^Q, \overline{U}) > Y(L_B^Q, \overline{U})$, *entonces* $N_A^* < N_B^*$.

Interpretación geométrica. En la figura 5 se observa que si $Y(\overline{L}_A^X + L_A^Q, \overline{U}) > Y(L_B^Q, \overline{U})$, el tamaño poblacional en una situación de equilibrio N_A^* de la ciudad diversificada *A* será inferior, si se compara con N_B^* (la ciudad *B* está especializada en la producción de *Q*).

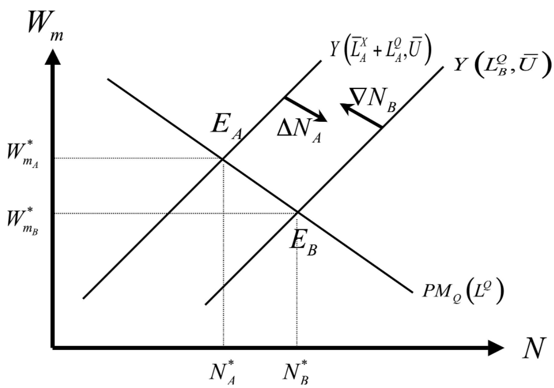
19 $\overline{L}_A^X$ es el número de empleados en el sector *X* de la ciudad *A*, que se supone exógeno.
20 $\overline{L}_A^Q$ es el número de empleados en el sector *Q* de la ciudad *A*, que se supone exógeno.
21 $\overline{L}_B^Q$ es el número de empleados en el sector *Q* de la ciudad *B*, que se supone exógeno.

Figura 5
Tamaño de las ciudades en equilibrio y pleno empleo,
cuando hay deseconomías de aglomeración



Corolario del teorema 4. Dado un nivel de utilidad $\bar{U}$, si $\bar{L}_{X_A}$, entonces el equilibrio será estable, ya que $W^*_{m_A} > W^*_{m_B}$ y, por tanto, parte de la población de la ciudad especializada B migrará hacia la ciudad diversificada A, de tal modo que los puntos de equilibrio E_A y E_B tienden a converger.

Figura 6
Equilibrio estable cuando hay deseconomías de aglomeración



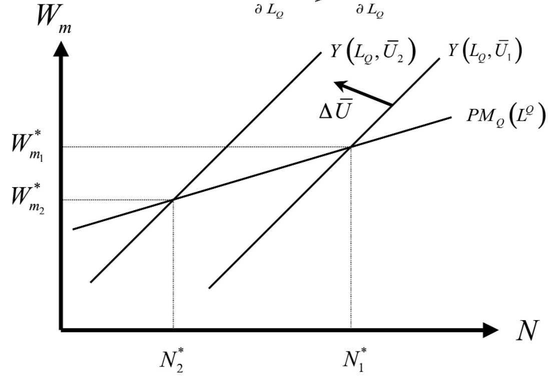
Hasta ahora se ha considerado que el nivel de utilidad $\bar{U}$ no variaba, sin embargo, en el siguiente teorema vamos a analizar el tamaño de equilibrio en un sistema de ciudades, cuando se incrementa el bienestar de las familias:

Teorema 5. En una ciudad especializada, con economías de aglomeración y pleno empleo, si $\frac{\partial Y(L_Q, \bar{U})}{\partial L_Q} > \frac{\partial PM_Q(L_Q)}{\partial L_Q}$ *, el tamaño de la población en una situación de equilibrio disminuirá, si aumenta el nivel de utilidad de las economías domésticas* $\bar{U}$*.*

ii) si $\frac{\partial Y(L_Q, \bar{U})}{\partial L_Q} < \frac{\partial PM_Q(L_Q)}{\partial L_Q}$ *, el tamaño de la población* N^* *en una situación de equilibrio aumentará, si se incrementa el nivel de utilidad de las economías domésticas* $\overline{U}$*.*

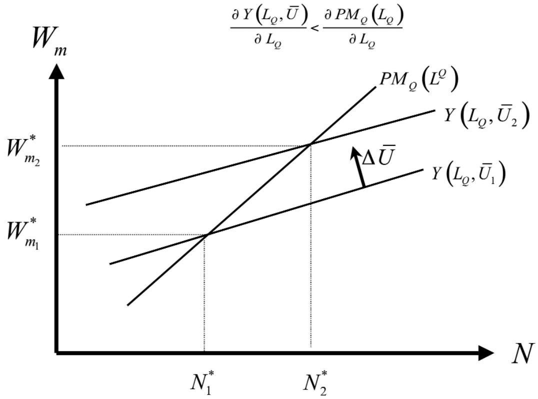
Interpretación geométrica. i) En la figura 7 se observa que en una ciudad especializada (es decir, con tan sólo una industria *Q*), con economías de aglomeración y en la que existe pleno empleo (y, por tanto se cumple la condición [22]), si se verifica la propiedad 8 y, además, $\frac{\partial Y(L_Q, \bar{U})}{\partial L_Q} < \frac{\partial PM_Q(L_Q)}{\partial L_Q}$, cualquier incremento en el bienestar de las familias $\bar{U}$ (se pasa de $\bar{U}_1$ a $\bar{U}_2$) generará una disminución del tamaño poblacional N^* (se pasa de N^*_1 a N^*_2).

Figura 7
Tamaño de una ciudad especializada cuando aumenta el nivel de utilidad y
$\frac{\partial Y(L_Q, \bar{U})}{\partial L_Q} > \frac{\partial PM_Q(L_Q)}{\partial L_Q}$



ii). En la figura 8 se observa que en una ciudad especializada, con economías de aglomeración y en la que existe pleno empleo, cuando se verifica la propiedad 8 y, además, $\frac{\partial Y(L_Q, \bar{U})}{\partial L_Q} < \frac{\partial PM_Q(L_Q)}{\partial L_Q}$, cualquier incremento en el bienestar de las familias $\bar{U}$ (se pasa de $\bar{U}_1$ a $\bar{U}_2$) genera un aumento del tamaño poblacional N^* (se pasa de N^*_1 a N^*_2).

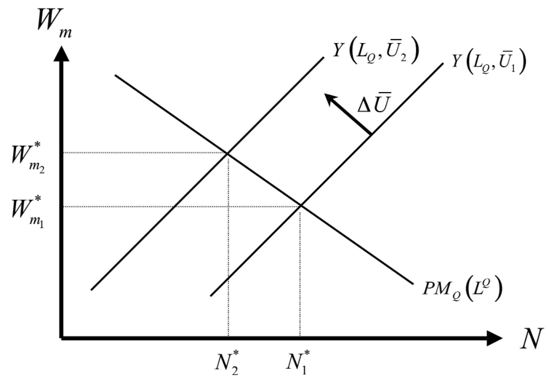
Figura 8
Tamaño de una ciudad especializada cuando aumenta el nivel de utilidad y
$\frac{\partial Y(L_Q, \bar{U})}{\partial L_Q} < \frac{\partial PM_Q(L_Q)}{\partial L_Q}$



Teorema 6. En una ciudad especializada, con deseconomías de aglomeración y pleno empleo, el tamaño de la población N^* en equilibrio disminuirá, si aumenta el nivel de utilidad de las economías domésticas $\bar{U}$.

Interpretación geométrica. En la figura 9 se observa que en una ciudad especializada (es decir, con tan sólo una industria Q), con deseconomías de aglomeración y en la que existe pleno empleo (y, por tanto se cumple la condición [22]), cuando se verifica la propiedad 8 y, además, $\frac{\partial PM_Q(L_Q)}{\partial L_Q} < 0$,cualquier incremento en el bienestar de las familias $\bar{U}$ (se pasa de $\bar{U}_1$ a $\bar{U}_2$) generará una disminución del tamaño poblacional N^* (se pasa de N^*_1 a N^*_2).

Figura 9
Tamaño de una ciudad especializada cuando aumenta el nivel de utilidad
y existen deseconomías de aglomeración



Los dos teoremas anteriores evidencian que el crecimiento de una ciudad especializada está condicionado por la productividad marginal y depende de la función de efectos externos de aglomeración. Efectivamente, cuando existen economías de aglomeración, cualquier incremento en el bienestar de las familias generará una disminución del tamaño de la población en una situación de equilibrio, siempre y cuando $\frac{\partial Y(L_Q, \bar{U})}{\partial L_Q} > \frac{\partial PM_Q(L_Q)}{\partial L_Q}$; por el contrario, el tamaño de la ciudad aumentará, si $\frac{\partial Y(L_Q, \bar{U})}{\partial L_Q} < \frac{\partial PM_Q(L_Q)}{\partial L_Q}$. Sin embargo, cuando existen deseconomías de aglomeración, cualquier incremento en el nivel de utilidad contribuirá a que disminuya el tamaño de la ciudad.

De los teoremas 5 y 6 también se infiere que el nivel de bienestar de las economías domésticas se incrementará, siempre que disminuya el tamaño de la población y, simultáneamente, existan deseconomías de aglomeración. Efectivamente, cuando hay una congestión derivada del exceso de dimensión de la ciudad, los costes que se derivan para las familias superan a los beneficios (Glaesser, 1998).

Una vez que se ha analizado el tamaño de una ciudad en equilibrio, hemos de pasar a estudiar la dimensión óptima de la misma.

4. Tamaño óptimo de una unidad

Para analizar el tamaño óptimo de una ciudad monocéntrica, con un gobierno local encargado de la planificación y el ordenamiento territorial, hemos de suponer que la Administración Pública puede expropiar suelo destinado a otros usos, i. e. agrícola,…, y arrendarlo a las familias a una renta *R*, con el fin de que la ciudad alcance la dimensión óptima. Asumimos, que todas las economías domésticas poseen una función de utilidad separable y estrictamente cuasicóncava (véase apéndice A.1)[22].

El objetivo del gobierno local será maximizar el excedente de renta *S*, que se define como la diferencia entre los ingresos de producción y el coste de mantenimiento del nivel de utilidad $\bar{U}$[23]:

$$\underset{\substack{h(r),m(r),\\ L^X,L_Z,n,\\ Z(r),Z,X,\\ N}}{Max}\ S = P_X X - \int_0^{r_f}\left(T(r) - \bar{U}^{\frac{1}{\alpha}} h^{-\frac{\beta}{\alpha}} Z^{-\frac{\delta}{\alpha}} n^{\frac{\delta}{\gamma\alpha}}\right) m(r)\,dr \qquad [23]$$

siendo *m(r)* el número de familias situadas a una distancia *r* del CBD.

La función objetivo anterior está sujeta a las restricciones del suelo urbano, población y pleno empleo en la ciudad:

- *Restricción de suelo urbano:* $d(r) > m(r)\,h(r) \quad \forall\ r < r_f$, siendo *d(r)* la oferta de suelo urbano a una distancia *r* del CBD.
- *Restricción de población:* $N = \int_0^{rf} m(r)\,dr$.
- *Restricción de pleno empleo:* $N = L^X + L_Z$[24]; siendo L_Z la cantidad de trabajo necesaria para producir *Z*.

[22] Tal y como se reseña en el apéndice A.1, en la especificación de la función de utilidad estamos asumiendo que existe una estructura organizativa de diferenciación de producto.

[23] La función objetivo planteada es similar a la propuesta por Abdel-Raman (1987), Kanemoto (1980) y Schweizer (1985).

[24] Se asume que cada bien Z_j posee una función de costes idéntica y con rendimientos constantes a escala, que adopta la siguiente forma lineal:

$L_{Z_j} = L_0 + lZ_j\,; \quad L_0$ y $l > 0, \quad \forall\, j \in Z$

siendo L_{Z_j} la cantidad de trabajo necesaria para producir Z_j; L_0 el coste fijo de producir Z_j y *l* el coste medio.

- *Restricción de la capacidad de producción de X: $X = cL^X$*; siendo c la cantidad de trabajo necesaria para producir una unidad del bien X.

- *Restricción del equilibrio entre oferta y demanda de Z: $Z = \int_0^r \hat{Z}(r)\, m(r)\, dr$*; siendo $\hat{Z}(r)$ la función de demanda compensada de Z.

A la vista de lo anteriormente expuesto, se trata de resolver un problema de control, en el que los precios sombra son: $R_s(r)$ (para el caso del suelo urbano), ϕ (para la restricción de población), Ψ (de producir X), χ (el del trabajo requerido para producir Z), η (para la restricción de pleno empleo) y ζ (para el supuesto de equilibrio entre oferta y demanda de Z). Para solucionar este problema (véase apéndice A.2) es necesario que $R_s(r)$, ϕ, χ, η y $\zeta \in$, siendo $0 < r < r_f$; de tal modo, que las condiciones de optimización son:

$$\frac{\partial L}{\partial m(r)} = -\left[T_r + \overline{U}^{\frac{1}{\alpha}} h^{-\frac{\beta}{\alpha}} Z^{-\frac{\delta}{\alpha}} n^{-\frac{\delta}{\gamma\alpha}}\right] - \zeta m(r) - R_S(r) + \phi = 0 \qquad [24]$$

$$\frac{\partial L}{\partial h(r)} = -\left[-\frac{\beta}{\alpha} \overline{U}^{\frac{1}{\alpha}} h^{\frac{-(\beta-\alpha)}{\alpha}} Z^{-\frac{\delta\lambda}{\alpha}} n^{-\frac{\delta}{\gamma\alpha}}\right] m(r) - R_S(r) m(r) = 0 \qquad [25]$$

$$\frac{\partial L}{\partial Z(r)} = -\left[-\frac{\delta}{\alpha} \overline{U}^{\frac{1}{\alpha}} h^{-\frac{\beta}{\alpha}} n^{-\frac{\delta}{\gamma\alpha}} Z^{-\frac{(\delta-\alpha)}{\alpha}}\right] m(r) - \zeta m(r) = 0 \qquad [26]$$

Las condiciones de transversalidad para L_Z, L^X, N, n, X y Z son:

$$\eta - \chi n = 0 \qquad [27]$$

$$\psi c - \chi = 0 \qquad [28]$$

$$-\phi + \chi = 0 \qquad [29]$$

$$-\left[-\frac{\delta}{\gamma\alpha}\bar{U}^{\frac{1}{\alpha}}h^{-\frac{\beta}{\alpha}}Z^{-\frac{\delta}{\alpha}}n^{-\frac{(\delta-\gamma\alpha)}{\gamma\alpha}}\right]m(r)-\chi L_Z=0 \qquad [30]$$

$$P_X-\psi=0 \qquad [31]$$

$$\zeta-l\phi=0 \qquad [32]$$

$$-\left[T(r)+\bar{U}^{\frac{1}{\alpha}}h^{-\frac{\beta}{\alpha}}Z^{-\frac{\delta}{\alpha}}n^{-\frac{\delta}{\gamma\alpha}}\right]m(r_f)+\phi m(r_f)-\zeta Z(r_f)m(r_f)=0 \qquad [33]$$

La ecuación [24] representa el coste marginal social que supone un incremento infinitesimal del número de familias *m(r)* localizadas a una distancia *r* del CBD, manteniéndose constante el nivel de bienestar $\bar{U}$. Por otra parte, si asumimos que la renta de la tierra *R(r)* es igual al coste de oportunidad de ese suelo destinado a usos agrícolas $R_S(r)$, concluimos que la expresión [25] expresa la relación marginal de sustitución entre suelo y el bien *X*. Por el contrario, la ecuación [26] es la relación marginal de sustitución entre los bienes *Z* y *X*.

Las condiciones [27] y [28] representan el beneficio marginal social de los empleados en los sectores *X* y *Z*, respectivamente, en una situación de pleno empleo. Sin embargo, la expresión [29] nos indica que en equilibrio, el coste marginal social ϕ es igual al beneficio marginal social χ. La ecuación [30] refleja el beneficio marginal de una empresa de la industrial *Z* de la ciudad; mientras que [31] y [32] expresa que P_X (precio del bien *X*) y ζ (precio de *Z*) son iguales al coste marginal de producción. Por último, la condición [33] nos ilustra cual es el coste marginal privado en el límite de la zona residencial r_f de la ciudad.

A partir de las condiciones de optimización y de transversalidad podemos analizar la relación que existe entre la producción óptima y de equilibrio en una empresa del sector *Z* y el diferencial de renta del suelo y los costes fijos, cuando la ciudad alcanza su tamaño óptimo[25].

[25] Véase Sáez Lozano y Brañas Garza (2001). En este estudio se formulan dos teoremas en los que se analizan estas cuestiones.

5. Tamaño óptimo y de equilibrio en un sistema de ciudades

Este estudio quedaría incompleto, si no investigamos la relación entre el tamaño óptimo y de equilibrio en una ciudad (teorema 7) y la dimensión óptima de las ciudades del sistema (teorema 8):

Teorema 7. i) En una ciudad especializada B, en la que hay pleno empleo, si $\left.\frac{\partial Y\left(L_Q, \overline{U}\right)}{\partial\left(L_Q\right)}\right|_{L_Q<L_Q^*} > \left.\frac{\partial PM_Q\left(L_Q\right)}{\partial\left(L_Q\right)}\right|_{L_Q<L_Q^*}$ *y* $\frac{\partial PM_Q\left(L_Q\right)}{\partial\left(L_Q\right)} > 0$*, entonces* $N^O{}_B > N^*{}_B$ *(siendo* $N^O{}_B$ *el tamaño óptimo de la ciudad B).*

ii) Si $\left.\frac{\partial Y\left(L_Q, \overline{U}\right)}{\partial\left(L_Q\right)}\right|_{L_Q<L_Q^*} > \left.\frac{\partial PM_Q\left(L_Q\right)}{\partial\left(L_Q\right)}\right|_{L_Q<L_Q^*}$*, pero* $\frac{\partial PM_Q\left(L_Q\right)}{\partial\left(L_Q\right)} < 0$*, entonces* $N_B^O < N_B^*$.

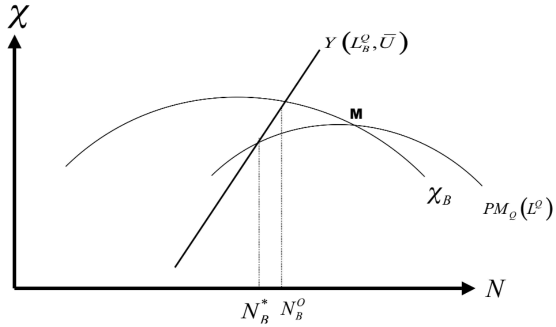
Interpretación geométrica. i) El beneficio social marginal χ_B en la ciudad B es:

$$\chi_B = P_Q\left[G\left(L_{Q_B}\right) + \frac{dG\left(L_{Q_B}\right)}{dL_{Q_B}} L_Q^j\right] \qquad \forall\ j \in Q \tag{34}$$

Si comparamos la expresión anterior con la ecuación [6], concluimos que $\chi_B > PM_Q$, $\forall\ L_Q \in (0, L^M{}_Q)$[26]; y $\chi_B > PM_Q$, $\forall\ L_Q \in (L^M{}_Q, \infty)$, tal y como se puede observar en la figura 10. Bajo estas condiciones se concluye que $L^O{}_{Q_B} > L^*{}_{Q_B}$, y dado que existe pleno empleo en ciudad B, entonces $N^O{}_B > N^*{}_B$ (ecuación [22]).

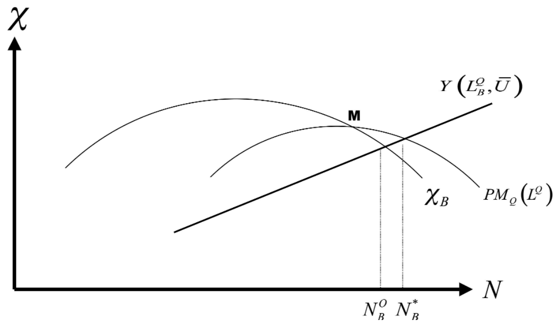
[26] L_Q^M es el punto donde la PM_Q alcanza su valor máximo.

Figura 10
Tamaño óptimo y de equilibrio de una ciudad especializada,
en la fase inicial de formación del sistema de ciudades



ii) De la figura 11, se infiere, que $\chi_B > PM_Q$, $\forall\ L_Q \in (0, L^M{}_Q)$; y , $\chi_B < PM_Q$, $\forall\ L_Q \in (L^M{}_Q, \infty)$. Bajo estas condiciones se concluye que $L^O{}_{Q_B} < L^*{}_{Q_B}$, y dado que existe pleno empleo en ciudad B, entonces $N^O{}_B < N^*{}_B$ (ecuación [22]).

Figura 11
Tamaño óptimo y de equilibrio de una ciudad especializada,
en la fase final de formación del sistema de ciudades



Este teorema pone de manifiesto, que en la fase inicial de formación del sistema de ciudades, en las que existen economías de localización (es el caso de la ciudad especializada B), las empresas *j* de la industria *Q* no se benefician, ya que emplean una cantidad $L^*{}_Q$. La ciudad alcanzaría su tamaño óptimo N^O, si las empresas de la citada industria empleasen $L^O{}_Q$ unidades de trabajo, es decir, si se igualara el coste marginal privado $Y(N, \bar{U})$ y el beneficio marginal social χ_B, dado que estarían internalizando los efectos externos de localización; simultáneamente, las economías domésticas recibirían un salario $W^O{}_m$[27] mayor que $W^*{}_m$. En una fase posterior aparecerán las deseconomías de localización (efectos de desbordamiento), y las empresas de la industria Q pagarán un salario $W^*{}_m$, mayor que el óptimo $W^O{}_m$; simultáneamente, las familias incurrirán en un coste marginal $Y(N, \bar{U})$ mayor, si se compara el coste marginal privado cuando la ciudad alcanza su tamaño óptimo N^O.

La dimensión óptima de la ciudad se logra cuando $Y(N, \bar{U}) \equiv \chi$.

Corolario del teorema 7. En una ciudad especializada B, en la que hay pleno empleo,

$$si\ \left.\frac{\partial Y\left(L_Q, \bar{U}\right)}{\partial\left(L_Q\right)}\right|_{L_Q<L_Q^M} < \left.\frac{\partial PM_Q\left(L_Q\right)}{\partial\left(L_Q\right)}\right|_{L_Q<L_Q^M};\ \left.\frac{\partial PM_Q\left(L_Q\right)}{\partial\left(L_Q\right)}\right|_{L_Q<L_Q^M} > 0\ \ y\ \ \left.\frac{\partial PM_Q\left(L_Q\right)}{\partial\left(L_Q\right)}\right|_{L_Q^M<L_Q<\infty} < 0$$

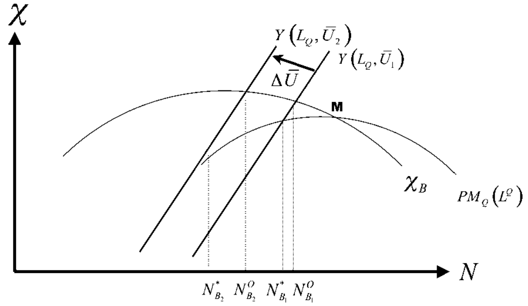
entonces $N^O{}_B < N^*{}_B$, *cuando* $0 < L_Q < \infty$ (véase figura 12).

Este corolario viene a concluir, que el tamaño óptimo N^O de una ciudad será mayor que el de equilibrio N^*, siempre y cuando, en la fase inicial de formación del sistema de ciudades, el coste marginal privado $Y(N, \bar{U})$ aumente menos que la productividad marginal PM.

Hasta ahora hemos considerado que el nivel de utilidad $\bar{U}$ era constante, sin embargo, cuando el bienestar familiar es variable se deduce que el tamaño óptimo y de equilibrio de una ciudad especializada B en la que existe pleno empleo, disminuye (se pasa de $N^O{}_{B_1}$ a $N^O{}_{B_2}$ y de $N^*{}_{B_1}$ a $N^*{}_{B_2}$) ante un incremento de $\bar{U}$ (se pasa de $\bar{U}_1$ a $\bar{U}_2$), siempre y cuando el coste marginal privado $Y(N, \bar{U})$ aumente más que la productividad marginal PM_Q, a medida que se incrementa el nivel de población activa ocupada L_Q (véase figura 13).

[27] W^O_M es el salario monetario cuando la ciudad alcanza su tamaño óptimo.

Figura 12
Tamaño óptimo y de equilibrio de una ciudad especializada, cuando aumenta el nivel de utilidad



Tal y como avanzamos en la introducción de este epígrafe, no podemos concluir sin analizar por qué una ciudad especializada B emplea a más personas que otra ciudad A diversificada, cuando ambas alcanzan su dimensión óptima, existe pleno empleo y $L^{\bar{X}} > 0$ (teorema 8).

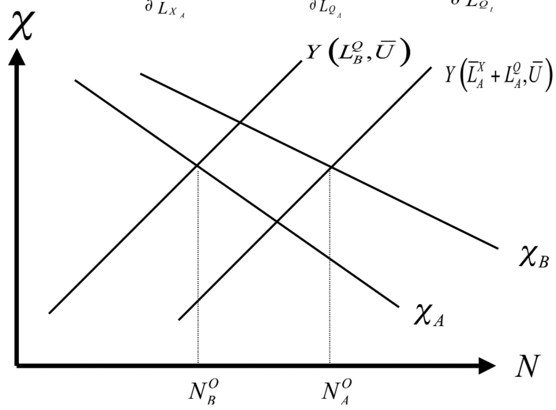
Teorema 8. Sea un sistema de ciudades A (diversificada) y B (especializada) que alcanzan su dimensión óptima y en las que existe pleno empleo, si $\bar{L}^X > 0$, $\frac{\partial F(L_{X_A}, L_{Q_A})}{\partial L_{X_A}} < 0$, $\frac{\partial F(L_{X_A}, L_{Q_A})}{\partial L_{Q_A}} < 0$ *y* $\frac{\partial G(L_{Q_l})}{\partial L_{Q_l}} < 0$, *(siendo l = A y B), entonces* $L^O_{Q_A} > L^O_{Q_B}$ *y* $N^O_A > N^O_B$.

Interpretación geométrica. El beneficio social marginal χ_A en la ciudad A es:

$$\chi_A = P_X \frac{\partial F(L_{X_A}, L_{Q_A})}{\partial L_{X_A}} + P_Q \left[G(L_{Q_A}) + \frac{dG(L_{Q_A})}{dL_{Q_A}} L_Q^j \right] \quad \forall\ i \in X \ y \ j \in Q \qquad [35]$$

Si comparamos las expresiones [34] y [35], concluimos que $\chi_A < \chi_B$ para todo valor de $L_Q > 0$, siempre y cuando $\frac{\partial F(L_{X_A}, L_{Q_A})}{\partial L_{X_A}} < 0$; de ahí, que $L^O_{Q_A} > L^O_{Q_B}$, tal y como se evidencia en la figura 13. Por otra parte, dado que $\bar{L}^X > 0$ y existe pleno empleo, concluimos que $L^X_A + L^Q_A > L^Q_B$ cuando las ciudades A y B alcanzan su dimensión óptima y, por tanto $N^O_A > N^O_B$ (ecuaciones [21] y [22]).

Figura 13
Tamaño óptimo de un sistema de ciudades con pleno empleo, cuando
$\frac{\partial F(L_{X_A}, L_{Q_A})}{\partial L_{X_A}} < 0 \quad \frac{\partial F(L_{X_A}, L_{Q_A})}{\partial L_{Q_A}} < 0 \quad \frac{\partial G(L_{Q_i})}{\partial L_{Q_i}} < 0$



6. Conclusiones

Una vez expuesto el modelo bisectorial que explica la formación y el crecimiento de un sistema de ciudades, ha llegado el momento de hacer balance de las principales conclusiones que se derivan del mismo, con el fin de concluir, si se han logrado cubrir los objetivos anunciados en la introducción. Sin embargo, antes de comenzar a enunciar los principales resultados del estudio, es preciso recordar los tres grandes supuestos sobre los que se fundamenta este modelo, pues en gran medida condiciona las conclusiones obtenidas: (1) en cada aglomeración urbana existen dos sectores (economías domésticas y producción), (2) las familias poseen un nivel de utilidad exógeno, y (3) las funciones de producción se caracterizan por depender tan sólo del input trabajo, presentan rendimientos constantes a escala y el factor de progreso técnico es neutral en sentido de Hicks (y representa los efectos externos de aglomeración).

Uno de nuestros objetivos era analizar el papel que juegan los efectos externos de aglomeración en la determinación del tamaño de un sistema de ciudades monocéntricas y abiertas en una situación de equilibrio. De todo el análisis anterior, podemos concluir, que en una primera fase de desarrollo, en la que existen economías de aglomeración, la ciudad especializada es más grande (mayor población) y emplea a más trabajadores que la diversificada. Sin embargo, en una segunda etapa, es decir, cuando aparecen las deseconomías de aglomeración, la ciudad diversificada alcanza una dimensión mayor y emplea a más población activa, que la especializada.

Otro objetivo que nos fijamos era investigar cuando se alcanza la dimensión óptima en un sistema de ciudades. Del análisis de las condiciones de optimización y transversalidad concluimos, en primer lugar, que la producción óptima y de equilibrio de cada empresa coincide con la de equilibrio; y en segundo término, cuando la ciudad alcanza su dimensión óptima, el diferencial de renta del suelo es mayor o igual que el coste fijo de producción.

No podíamos concluir nuestro estudio, sin analizar la relación entre el tamaño de ciudad en equilibrio y la dimensión óptima. En una primera fase de desarrollo, en la que existen economías de localización, las empresas no se benefician de los efectos externos positivos generados por esta fuerza de aglomeración y, por tanto, la ciudad alcanzará su dimensión óptima cuando el coste marginal de cada unidad productiva se iguale al beneficio marginal social. Sin embargo, en la fase siguiente, cuando aparecen las deseconomías de localización, las unidades de producción se ven perjudicadas por los efectos nocivos generados. En cualquier caso, la dimensión óptima será menor que el tamaño de equilibrio, siempre y cuando el coste marginal privado aumente menos que la productividad.

A modo de conclusión, hemos de reiterar que este trabajo contribuye, tal y como no propusimos en la introducción, a mejorar y ampliar la literatura existente acerca de la interacción entre estructura de mercado, economías de aglomeración y sistema de ciudades.

7. Referencias

Abdel-Rahman, H.M (1987). «Market structure, agglomeration and systems of cities in spatial economies». University of Pensylvania Press, Pe.

— 1988). Product differentiation, monopolistic competition and city size. Regional Science and Urban Economics 18: 69-86.

Alonso, W. (1964). «Location and Land Use: Towards a General Theory of land Rent». Harvard University Press, Cambridge, Ma.

Alonso-Villar, O. y De Lucio, J.J. (1999). Una aproximación a la economía urbana, Revista de Economía Aplicada 21(7):121-157.

Anas, A (1988). Agglomeration and test heterogeneity. Equilibria, stability, welfare and dynamics. Regional Science and Urban Economics, núm. 18: 7-35.

Arnot, R.J (1979). Optimal city size in a spatial economy. Journal of Urban Economics 6: 65-89.

ARNOT, R.J y STIGLITZ, J.E (1979). Aggregate land rents, expenditure on public goods, and optimal city size. Quarterly Journal of Economics 93 (4): 471-490.

ARTHUR, B. (1990). 'Silicon Valley' locational clusters: when do increasing returns imply monopoly? Mathematical Social Sciences 19: 235-251.

ARTÍS, M.; ROMANI, J. y SURINACH, J. (2000). Determinants of Individual Commuting in Catalonia, 1986-91: Theory and Empirical Evidence. Urban Studies 37(8):1431-50.

ATKINSON, A.B y STIGLITZ, J.E. (1988). «Lecciones sobre Economía Pública». Instituto de Estudios Fiscales, Madrid. Traducción del original de 1980.

BECKER, G.S. (1968). Crime and Punishment: An Economic Approach. Journal of Political Economy 76: 169-217.

BECKMANN, M.J (1976). Spatial equilibrium in the dispersed city. Incluido en Papageorgiou, Y.Y (edit). «Mathematical land use theory». Lexington Books.

BENABOU, R. (1993). Working of a city: location, education and production. Quarterly Journal of Economics 106: 619-652.

BORUKHOV, E y HOCHMAN, O (1977). Optimum and market equilibrium in a model of a city without a predetermined center. Environmet and Planning A, vol 9: 73-90.

BRAKMAN, S.; GARRETSEN, H.; VAN MARREWIJK, C. Y VAN DEN BERG, M (1999). The Return of Zipf: Towards a further Understanding of the Rank-Size Distribution. Journal of Regional Science 39: 183-213.

SÁEZ LOZANO, J. L. y BRAÑAS GARZA, P (2001). Sistema de ciudades y tamaño: Un modelo de diferenciación del producto. Estudios Económicos, Vol 16(1): 73-104.

CHRISTALLER, W. (1933). Die Zentralen Orte in Süddeutschland, Berlin, Gustav Fisher Verlag. Traducción inglesa: The Central Places of Southern Germany, Englewood Cliffs (N.J.), Prentice?Hall (1966).

DAVID, P.A. y Rosenbloom, J.L. (1990). Marshallian factor market externalities and the dynamics of industrial localization. Journal of Urban Economics 28: 349-370.

DE SALVO, J. (1977). Urban Household Behavior in a Model of Completely Centralized Employment. Journal of Urban Economics 4: 1-14.

DIXIT, A (1973). The optimal factory town. Bell Journal of Economic and Management Science, vol 4: 637-651.

DIXIT, A. y STIGLITZ, J. E. (1973). Monopolistic competition and optimum product diversity. American Economic Review 67, 297-308.

FUJITA, M (1983). Efficiency and equity in regional development with agglomeration economies. Incluido en Isard, W y Nagao Y (edit). «International and regional conflict». Edit. Ballinget.

— (1988). A monopolistic competition model of spatial agglomeration. Regional Science and Urban Economic, vol 18: 4-21.

— (1989). «Urban Economics Theory: Land use and city size». Cambridge U.P., Cambridge, Ma.

FUJITA, M. y THISSE, J. F. (1996). Economics of Agglomeration. Journal of the Japanese and International Economies 10: 339-378.

GASPAR, J. y GLAESER, L. (1998). Information Technology and the Future of Cities. Journal of Urban Economics 43(1): 136-56.

GLAESER, E. (1998). Are Cities Dying? Journal of Economic Perspectives 12(2): 139?160.

HELSEY, R.W (1985). «Economies of agglomeration and urban spatial structure». University Princenton.

HENDERSON, J.V (1977). «Economic theory and the cities». Academic Press, London.

— (1974). The Sizes and Types of Cities. American Economic Review 44: 640-656.

HIRSCHMAN, A.O. (1958). «The Strategy of Economic Development». Yale Univ. Press, New Haven, Con.

HOCHMAN, E (1981). Land rents, optimal taxation and local fiscal independence in an economy with local public goods. Journal of Public Economics 15: 59-85.

HOOVER, E. U (1948). «The location of economic activity». McGraw-Hill.

JACOBS, J. (1969). «The Economy of Cities». Vintage Books, New York.

KANEMOTO, Y (1980). «Theories of urban externalities».En: Handbook of Urban Economics, North-Holland, Amsterdam.

KHAN, M. (1996). The Silver Lining of Rust Belt Decline: Killing off Pollution Externalities. mimeo.

KRUGMAN, P. (1979). Increasing returns, monopolistic competition and international trade. Journal of International Economics 9: 469-479.

— 1991). Increasing returns and economic geography. Journal of Political Economy 99: 483-99.

KRUGMAN, P. y LIVAS ELIZONDO, R. (1996). Trade policy and the third world metropolies. Journal of Development Economics 49: 137-150.

LUCAS, R.J. (1988). On the mechanics of economic development. Journal of Monetary Economics, 22: 3-42

MARSHALL, A. (1890). «Principles of Economics». Macmillan, London.

MILLS, E. S. (1967). An aggregate model of resource allocation in a metropolitan area. American Economic Review 57: 197-210.

MIRRLEES, J. A (1972). «Studies in the structure of urban economy». Johns Hopkins Press.

— (1972). The optimum town. Swedish Journal of Economics, vol 74: 114-136.

MIYAO, T (1978). Dynamic inestability of a miced city in the presence of neighbood externalities. American Economic Review, vol 68: 454-463.

MUTH, R.F. (1969). «Cities and Housing». Chicago University Press, Chicago, Ill.

MYRDAL, G. (1957). «Economic theory and under-developed regions». Duckworth, London.

OGAWA, H y FUJITA, M (1982). Multiple equilibria and structural transition of nonnocentric urban configurations. Regional Science and Urban Economics, vol 12: 161-196.

PAPAGEORGIOU, Y. Y y SMITH, T.R (1983). Agglomeration as local inestability of spatially uniform steady-states. Econometrica, vol 51, núm. 4.

PAPAGEORGIOU, Y. Y y THISSET, J-F (1982). Agglomeration as spatial interdependence between firms and households. Journal of Economic Theory, vol 37: 19-31.

RAUCH, J. E. (1991). Comparative advantage, geographic advantage and the volume of trade. The Economic Journal 101: 1.230-1.244.

— (1993). Does history matter only when it matters little? The case of city-industry location. Quarterly Journal of Economics 108: 380-400.

RIVERA-BATIZ, F.L (1988). Increasing returns, monopolistic competition, and agglomeration economies in consumption and production. Regional Science and Urban Economics, vol 18: 125-153.

SAXENIAN, A. (1994). «Regional Advantage: Culture, and Competition in Silicon Valley and Route». Harvard University Press, Cambridge, Ma.

SCHEWEIZER, U (1985). Theory of city system structure. Regional Science and Urban Economics, vol 15: 159-180.

SMITH, T. R y PAPAGEORGIOU, G.J (1982). Spatial externalities and the stability of interacting populations near the center of a large area. Journal of Regional Science, vol 22, núm. 1: 1-18.

UPTON, Ch (1981). An equilibrium model of city size. Journal of Urban Economics, vol 10: 15-36.

VON THÜNEN, J.H. (1826). «Der Isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft un Nationalökonomie». Perthes, Hamburg. (Traducción inglesa: «The Isolated State». Pergammon Press, Oxford, 1966).

WEBER, A (1929). «Theory of the location of industries». Chicago University Press, Ca., Ma.

— (1909): «Ueber den Standort der Industrien». J.C.B. Mohr, Tübingen. (Traducción inglesa: «The Theory of the Location of Industries». Chicago University Press, Ca., Ma., 1929).

YANG, C.H y Fujita, M (1983). Urban spacial structure with open space. Environment and Planning 15: 67-84.

APÉNDICE

A. *Notas matemáticas*

A.1.

La función de utilidad separable y estrictamente cuasicóncava que consideramos en este caso es:

$$U = X^{\alpha} h^{\beta} Z^{\delta} \qquad \textit{siendo } Z = \left(\sum_{j}^{n} Z_j^{\gamma} \right)^{1/\gamma} ; \alpha, \beta, \gamma \ y \ \delta > 0 \ y \ \alpha + \beta + \delta = 1$$

siendo X el consumo familiar del bien X; h es el suelo urbano ocupado por una economía doméstica; Z el consumo familiar de otros bienes diferentes a X, que es una combinación de los distintos bienes Z producidos por las empresas *j;* el parámetro γ *a là* Dixit-Stiglitz, $\gamma \in (0, 1)$, representa las preferencias del consumidor por la variedad de Z, de tal forma que, cuando $\gamma \to 1$, dichos bienes son sustitutivos, mientras que cuando $\gamma \to 0$, hay una mayor preferencia por la variedad y las economías domésticas experimentan una mayor utilidad si incrementan el consumo de todos los bienes Z. En términos de Atkinson y Stiglitz (1988), se diría que cuando $\gamma \to 0$, las familias valoran la diversidad.

Implícitamente, estamos asumiendo que existe una estructura organizativa de diferenciación de producto. La presencia de bienes diferenciados permite a las economías domésticas incrementar su nivel de utilidad, mientras que para las empresas supone una reducción del coste medio de producción.

A.2.

La función auxiliar de Hamilton es:

$$H = -\left[T(r) + \bar{U}^{\frac{1}{\alpha}} h^{-\frac{\beta}{\alpha}} Z^{-\frac{\delta}{\alpha}} n^{-\frac{\delta}{\gamma \times \alpha}} \right] m(r) - \zeta m(r) + \gamma m(r).$$

La de Lagrange es:

$$L = H + R_S(r)[d(r) - m(r)h(r)] + \psi[cL^X - X] + \eta[L_Z - lZ - L_0] + \chi[N - nL_Z - L^X]$$

B. Demostraciones

B.1. Demostración del teorema 1

En un sistema con dos ciudades A y B en equilibrio, con un sector de producción bisectorial, si $Y(N^*_A, \bar{U}) > / < Y(N^*_B, \bar{U})$, entonces $W^*_{m_A} > / < W^*_{m_B}$ (ecuaciones [19] y [20]) y, por tanto $L^*_{X_A} + L^*_{Q_A} > L^*_{Q_B}$, para un nivel de utilidad $\bar{U}$. Si además existe pleno empleo, entonces $L^X_A + L^Q_A > L^Q_B$ (ecuaciones [21] y [22]) y , por tanto, $N^*_A > / < N^*_B$.

B.2. Demostración del teorema 2

Del teorema 1 se infiere que en un sistema con dos ciudades A y B en equilibrio y pleno empleo, si $W^*_{m_A} > / < W^*_{m_B}$, entonces $N^*_A > / < N^*_B$. Si además, tan sólo se produce un único bien Q, entonces $L^Q_A > / < L^Q_B$ (ecuación [22]).